2°/

a) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n}{U_n^2+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-U_n^2)}{1+U_n^2}$

On a : $0 < U_n < 1$ d'où : $(1 - U_n^2) > 0$

Et par suite : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

b) $\begin{cases}(Un) \text{ est une suite croissante}\\(Un) \text{ est majorée par 1}\end{cases}$

d'où (U_n) est convergente

c) Soit $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

D'où : $\ell = f(\ell)$ et par suite

$\ell = \dfrac{2\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell^3 + \ell = 2\ell$ signifie : $\ell = 0 ou\ \ell = 1 ou\ \ell = -1$

On a : $\begin{cases}U_0 = \dfrac{1}{2}\\(U_n) \text{est croissante}\end{cases}$ alors $U_n \geq \dfrac{1}{2}$ or $U_n < 1$

d'où $\dfrac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ et par suite $\dfrac{1}{2} \leq \ell < 1$

Conclusion : $\ell = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3°/

a) $V_{n+1} = \dfrac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \dfrac{1-\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}}{1+\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}} = \dfrac{1+U_n^2-2Un}{1+U_n^2+2U_n} = \left(\dfrac{1-U}{1+U_n}\right)^2 = V_n^2$

b) $V_0 = \dfrac{1-U_0}{1+U_0} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(2^0)}$